

Liste mit Facharbeitsthemen

für das Fach Mathematik

Die nachfolgenden Facharbeitsthemen sollen als Anregung dienen. Manche Formulierungen sind enger gefasst, manche weiter; in beiden Fällen bedürfen sie der Anpassung durch den Kursleiter.

An dieser Stelle sei den derzeit leider wenigen, vorschlagenden Kolleginnen und Kollegen gedankt. Das ISB ist weiterhin sehr an aktuellen, ansprechenden Facharbeitsthemen interessiert, um sie in die nachfolgende Liste aufzunehmen. Die Themenauswahl ist nach folgenden Bereichen geordnet:

- **Infinitesimalrechnung**
- **Analytische Geometrie**
- **Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik**
- **Informatik**
- **Sonstige**

Infinitesimalrechnung

Geschichte der Infinitesimalrechnung

- Die Geschichte der Integralrechnung von den Anfängen bis Leibniz
- Die historische Entwicklung des Integralbegriffs
- Der Differential- und Integralbegriff bei Leibniz und Newton
- Die Eulersche Zahl e
- Wege zu den reellen Zahlen

Funktionsbegriff

- Grundlagen und Anwendungen von Logarithmuspapier
- Graphische Darstellungsformen für Funktionen mit zwei reellen Variablen
- Darstellung einer Funktionenschar in einem dreidimensionalen Koordinatensystem
- Einhüllende von Kurvenscharen
- Symmetrieeigenschaften von Funktionsgraphen
- Die hyperbolischen Funktionen
- Die Kettenlinie
- Zusammenhang zwischen den Funktionen $x \rightarrow f(x)$ und $x \rightarrow f(x^2)$
- Zusammenhang zwischen den Funktionen $x \rightarrow f(x)$ und $x \rightarrow x \cdot f(x)$
- Zusammenhang zwischen den Funktionen $x \rightarrow f(x)$ und $x \rightarrow x \cdot e^{f(x)}$
- Welche Aussagen ergeben sich aus dem Graphen von $f(x)$ für die Graphen der folgenden Funktionen?

$$x \rightarrow f(\sqrt{x}) \quad x \rightarrow \sqrt{f(x)} \quad x \rightarrow \frac{1}{f(x)} \quad x \rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Diskussion von Funktionen, die durch Verkettung einer Grundfunktion entstehen

Kurvendiskussion

- Systematische Untersuchung der gebrochen-rationalen Funktionen, bei denen der Grad des Zähler- und Nennerpolynoms höchstens zwei beträgt
- Extremwerte von Funktionen des Typs $z=f(x,y)$ - Lösungsverfahren und Anwendung auf selbst gewählte Beispiele
- Untersuchung ganzrationaler Funktionen zweier Veränderlicher mit der Funktionsgleichung $f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$
- Diskussion der Funktionenschar $f_{c,k}(x) = k \cdot \exp(-cx^2)$
- Diskussion der Funktionenschar $f(x) = e^{-t} \cdot t^{x-1}$
- Diskussion der Funktionenschar $f(x) = x^n \cdot e^{mx}$ ($n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$)

Konvergenz

- Verschiedene Arten von Konvergenz
- Konvergenzkriterien für unendliche Folgen und Reihen
- Divergente und konvergente Reihen
- Potenzreihen (Konvergenz, Verknüpfung, Betrachtung bekannter Funktionen als Potenzreihen)
- Approximation beliebiger Funktionen durch ganzrationale Funktionen
- Taylorreihen reeller Funktionen
- Die Taylorsche Formel und ihre Anwendung zur Berechnung spezieller Funktionen
- Fourierreihen und Fourierintegrale
- Näherungen für periodische Funktionen: Klärung der Theorie und Behandlung ausgewählter Beispiele

Differentiations- und Integrationsverfahren

- Graphisches Differenzieren und Integrieren - Methoden und Anwendungen in rechnerisch überprüfbar Beispielen
- Implizite Differentiation
- Integration durch Partialbruchzerlegung
- Integration gebrochen-rationaler Funktionen
- Die gliedweise Integration und Differentiation von Taylorschen Reihen
- Näherungsverfahren nach der Simpsonschen Regel
- Die Romberg-Integration: Iterationsverfahren für beliebig oft differenzierbare Integranden
- Raummessung durch Integration - Anwendung auf Kugel, Torus und Fass
- Kubatur der Rotationskörper
- Volumenberechnung durch Mehrfachintegration
- Volumen sowie Mantelfläche von Rotationskörpern und die Guldinschen Regeln
- Längen-, Flächen- und Volumenberechnung mit Hilfe der Integralrechnung
- Integration beim Steinerschen Satz
- Schwerpunktbestimmung bei Kurven, ebenen Flächen, Drehflächen und Drehkörpern mittels Integration
- Das Fadenpendel - numerische Integration mit Hilfe der Trapezregel

Numerische Analysis

- Darstellung und Vergleich der Interpolationsverfahren nach Lagrange und Newton
- Berechnung reeller Nullstellen von Polynomen durch Näherungsverfahren
- "Schwimmende Kugel" - Nullstelleniteration nach Newton
- "Die verflixte Korridorecke" - Nullstelleniteration nach Newton
- Bogenlänge einer Brücke - verschiedene Näherungen
- Die Laurinsche Reihe
- Darstellung und Diskussion verschiedener Methoden, die Eulersche Zahl e näherungsweise zu bestimmen
- Darstellung und Diskussion verschiedener Methoden, die Kreiszahl π näherungsweise zu bestimmen
- Näherungsverfahren zur numerischen Integration
- Numerische Differentiation
- Das Gaußsche Fehlerintegral

Differentialgleichungen

- Begriff der Differentialgleichung und Zusammenstellung einiger lösbarer Typen
- Graphische Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit Fehlerabschätzungen
- Lineare Differentialgleichungen
- Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen
- Wachstumsprozesse und Differentialgleichungen
- Die Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung und ihre Anwendung auf je ein Beispiel aus der Physik, der Chemie und der Biologie

Anwendungen der Infinitesimalrechnung

- Formen des Wachstums - mathematisch gesehen
- Elementare Anwendungen der Exponentialfunktion in der Physik
- Anwendung der Integralrechnung in der theoretischen Mechanik
- Einfache Anwendungen der Analysis in den Wirtschaftswissenschaften
- Extremalprobleme
- Die Berechnung von Extrema und Grenzlinien beim schiefen Wurf
- Diskussion der Funktionenschar $f_{a,b}(x) = \exp(ax) \cdot \cos(bx)$ und ihre Anwendung in der Physik

Analytische Geometrie

Geschichte der Geometrie - Axiomatik

- Die Poincarésche Halbebene als Modell einer Nichteuklidischen Geometrie
- Die fünf Platonischen Körper
- Die Archimedischen Körper
- Das Apollonische Berührproblem
- Elementargeometrie im Kleinschen Modell
- Hohlwelttheorie
- Klassische Probleme der Mathematik: Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal, Konstruierbarkeit regelmäßiger n -Ecke, Kreisteilung
- Historische Darstellung des klassischen Problems der Quadratur des Kreises
- Die Axiomatik der Inzidenzgeometrie (geschichtlicher Rückblick, Axiomensystem,

- affine und projektive Geometrie der Ebene, Modelle und einfache Folgerungen)
- Die Bedeutung des Parallelenaxioms für die Entwicklung der Geometrie
- Der Beweis des Eulerschen Polyedersatzes und Anwendungen auf die platonischen Körper und das Vierfarbenproblem

Lineare Algebra

- Das Gaußsche Eliminationsverfahren
- Darstellung und Vergleich: Gaußsches Eliminationsverfahren - Cramersche Regel
- Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungsvariablen
- Lösungsverfahren für lineare (m,n)-Gleichungssysteme
- n-reihige Determinanten
- Das Rechnen mit Matrizen und Anwendungen in der Abbildungsgeometrie
- Vektorprodukt und Spatprodukt mit Anwendungsbeispielen
- Das Skalarprodukt und seine Anwendung bei elementargeometrischen Beweisen
- Eigenschaften linearer Abbildungen von Vektorräumen
- Modelle von Vektorraumstrukturen
- Punkträume über Restklassenkörpern
- Der Faktorraum und seine Interpretation im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 und in Funktionsräumen

Geometrische Kurven, Flächen und Körper

- Parameterdarstellung, Bogenlänge und Krümmung ebener Kurven
- Die Parameterdarstellung einer Kurve in der Ebene und im Raum
- Die analytische Behandlung von Kreis und Kugel
- Bogenlänge, Krümmung, Evolute, Evolvente
- Die Ellipse und ihre Evolute
- Theorie der Raumkurven mit Anwendung auf verschiedene Schraubenlinien
- Radlinien
- Zykloiden, Epizykloiden und Hypozykloiden
- Die Kardioide
- Die Astroide
- Die Konchoide
- Cassinische Kurven
- Die Zissoide als geometrischer Ort und einige ausgewählte Probleme
- Die Serpentine des Isaak Newton
- Die Versiera der Maria Gaetana Agnesi
- Pascalsche Schnecken
- Archimedische und logarithmische Spirale - Eigenschaften und Vergleich
- Kettenlinie und Traktrix
- Spezielle algebraische Kurven vierter Ordnung
- Untersuchung von Polyedern
- Die Sechskugelfigur

Höherdimensionale Geometrie

- Körper im \mathbb{R}^3
- Figuren im vierdimensionalen Raum
- Das vierdimensionale Tetraeder und das vierdimensionale Oktaeder – Eigenschaften und zeichnerische Darstellung
- Geometrische Raumschauung am Beispiel des vierdimensionalen Würfels

Fraktale

- Schneeflockenkurven
- Einfache Beispiele zur fraktalen Geometrie

Kegelschnitte - Quadriken

- Klassifikation von Kegelschnitten
- Kegelschnitte - Eigenschaften und Konstruktionsverfahren
- Die Hauptachsentransformation von Kegelschnitten
- Affine Abbildung von Kegelschnitten
- Vektorielle Darstellung von Kegelschnitten
- Krümmung an Kegelschnitten - Theorie und Konstruktion
- Quadriken im Raum
- Hyperbolische Flächen
- Kegelschnittscharen - behandelt am Beispiel $ky^2 = (k - 64)x^2 - (k - 64)k$
- Die Bahnkurven von künstlichen Himmelskörpern als Kegelschnittbahnen

Abbildungen

- Inversion am Kreis
- Kongruenzabbildungen in analytischer Darstellung
- Erzeugung der Ähnlichkeitsabbildungen durch Verkettung von zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen
- Affine Vektorabbildungen im \mathbb{R}^2 mit vorgegebenen Eigenschaften
- Invarianten der affinen Abbildungen des \mathbb{R}^2 ,
- Darstellung der Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen mit Hilfe von Matrizen
- Gruppen von Deckabbildungen geometrischer Figuren und Körper: gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck, Rechteck, Quadrat, regelmäßiges Fünfeck und Sechseck; Würfel, reguläres Tetraeder

Anwendungen

- Kegelschnitte und ihre Anwendungen in der Physik
- Konstruktion eines Kreuzgewölbes (schiefe Axonometrie)
- Die Kurven in der Sonnenblume - Logarithmische Spiralen in der Natur
- Drehung und Verschiebung von Kristallen und ihre Darstellung auf der Bildebene
- Geometrische Untersuchung verschiedener Perspektivkonstruktionen in der Kunst
- Nichteuklidische Geometrien: Anwendungsmöglichkeiten und Bau eines Modells

Sphärische Trigonometrie

- Flächenberechnungen auf der Kugel
- Die Loxodrome
- Theorie und Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf Probleme der Geographie
- Kartographie – verschiedene Methoden im Vergleich
- Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die scheinbare Bewegung der Sonne
- Himmelsmechanik - Einführung in die Grundlagen und Diskussion ausgewählter Beispiele
- Geometrie auf der Kugel - Klärung von wichtigen Grundbegriffen und Sachverhalten
- Vergleich mit der ebenen euklidischen Geometrie

Darstellende Geometrie

- Zentralprojektion
- Perspektive in der Darstellenden Geometrie
- Durchdringung von Kegeln und Zylindern im Zweitafelverfahren
- Der Schnitt zweier Körper - dargestellt an selbst gewählten Beispielen
- Die Bilder von Tetraeder, Würfel und Oktaeder bei verschiedenen Projektionen
- Koordinatenvielfalt in Ebene und Raum

Sonstige

- Anaglyphen - Hilfsmittel im Geometrieunterricht
- Einführung in die Differentialgeometrie
- Der Satz von Morley - Beweis und Anwendungen
- Das Prinzip von Cavalieri - Beweis und Anwendungen
- Äquivalenzbedingungen für gleichschenklige Dreiecke
- Merkwürdige Punkte im Dreieck

Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik

Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Die geschichtliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung anhand von Biographien ausgewählter Mathematiker
- Die Geschichte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Wahrscheinlichkeiten bei Spielen

- Wahrscheinlichkeiten bei "Backgammon"
- Wahrscheinlichkeiten bei "Superhirn"
- Wahrscheinlichkeiten beim "Schafkopf"
- Das Würfelspiel "Kniffel" - einige ausgewählte Aspekte
- Wahrscheinlichkeiten beim Lotto "6 aus 49"
- Stochastische Analyse des Samstaglotos
- Roulette - Spielchancen und Spielsysteme
- Labyrinth (Kombinatorik)
- Entwurf eines kombinatorischen Spiels, bei dem ein Spieler im Vorteil ist, der sich in Kombinatorik gut auskennt

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Die Binomialverteilung (experimentelle Untersuchung an einem Beispiel aus der Biologie: Keimung von Kressesamen)
- Bau und Anwendung eines Galtonbretts
- Vergleich einer experimentellen Verteilung mit der Poissonverteilung anhand des radioaktiven Zerfalls
- Poissonverteilung und Normalverteilung
- Vergleich der Mittelwerte zweier Normalverteilungen an Beispielen des radioaktiven Zerfalls
- Erzeugung von hypergeometrischen, binomial-, normalverteilten Zufallszahlen aus

gleichverteilten Zufallszahlen

- Möglichkeiten zur Erzeugung von $[0; 1[$ -gleichverteilten Zufallszahlen; Beispiele für Transformationen in andere Verteilungen und Kriterien zur Beurteilung ihrer statistischen Qualität
- Der zentrale Grenzwertsatz und seine experimentelle Veranschaulichung mittels des Galtonschen Bretts

Statistik

- Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen in der Genetik
- Stochastischer Beweis genetischer Gesetzmäßigkeiten
- Theoretische Betrachtungen über durch den Zufall gesteuerte fundamentale Naturvorgänge und deren Simulation durch statistische Kugelspiele
- Untersuchung über Geburtstage anhand des Jahresberichts mit Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
- Verteilungsfunktionen in der Statistik
- Der P^2 -Test
- Stochastische Testverfahren
- Anwendung der Stochastik bei Meinungsumfragen

Stochastische Prozesse

- Grundlagen der Matrizenrechnung und ihre Anwendung in Markovketten
- Markovsche Kettenprozesse
- Ausgewählte Beispiele zur Simulation von Warteschlangenproblemen mit Hilfe von Zufallszahlen
- Monte-Carlo-Simulation

Sonstige

- Zufallsgeneratoren
- Das Wahrscheinlichkeitspapier
- Die Kreiszahl Pi - Betrachtung verschiedener Berechnungsverfahren, einschließlich Programmierung von zwei stochastischen Verfahren

Informatik

- Die geschichtliche Entwicklung der mechanischen Rechenmaschine bis zum Zeitalter der Elektronik
- Computerprogramm zur näherungsweisen Nullstellenberechnung mittels Regula Falsi bzw. mit dem Newtonschen Näherungsverfahren
- Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen n-ten Grades ($n < 5$) und Realisierung auf dem Computer
- Berechnung der Zahl Pi nach den Verfahren von Cusanus und Legendre
- Verwendung der Monte-Carlo-Methode bei der Integration von Funktionen und bei der Bestimmung der Kreiszahl Pi über das Buffonsche Nadelproblem
- Der Gaußsche Algorithmus für lineare Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten und seine praktische Realisierung
- Methoden der numerischen Integration und ihre Anwendung unter Zuhilfenahme eines PC's
- Entwicklung eines Computerprogramms zur Klassifizierung der allgemeinen

- Gleichung zweiten Grades mit zwei Variablen: $Ax^2+by^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$
- Algorithmus zum Umformen von Bruchtermen
- Computergraphische Experimente mit Rückkopplung: Feigenbaumdiagramm und Mandelbrotmengen
- Berechnung und graphische Darstellung von Satelliten- und Planetenbahnen mit Hilfe eines Computers
- Die Analyse von Suchproblemen – eine Aufgabe aus der Informatik
- Sortieralgorithmen
- Simulation von Zählvorgängen bei nicht unmittelbar zugänglichen Ergebnisräumen mit dem Computer
- Computersimulation von ausgewählten Kombinatorikproblemen

Sonstige

Geschichte der Mathematik

- Pythagoras und seine Mathematik
- Die Zahlenmystik bei Pythagoras
- Die Pythagoräer und ihre Lehre
- Die Mathematik im griechischen Altertum
- Magische Quadrate – Herkunft, Erstellung, Verwendung
- Der Abakus – die älteste Rechenmaschine: Geschichte und Funktionsweise
- Der Rechenschieber und seine Funktionsweise
- Zur Geschichte mathematischer Instrumente
- Geschichte und Berechnung der Kreiskonstanten Pi

Komplexe Zahlen

- Die Notwendigkeit einer Erweiterung des reellen Zahlenkörpers und die Durchführung dieser Erweiterung
- Die Konstruktion der komplexen Zahlen
- Geometrische Deutung der komplexen Zahlen
- Geometrische Veranschaulichung der komplexen Zahlen und ihrer Rechenoperationen in der Gaußschen Zahlenebene
- Die komplexen Zahlen und ihre Verwendung bei der harmonischen Schwingung
- Grundlagen der komplexen Rechnung in der Wechselstromtechnik
- Anwendung der komplexen Zahlen in der Physik
- Die Gleichung $e^{i\pi}+1=0$ - Interpretation mit Hilfe der Taylorreihen von $\sin(x)$, $\cos(x)$ und e^x

Algebraische Strukturen -Zahlentheorie

- Gruppen: Grundbegriffe – Nachweis der Gruppenaxiome für verschiedene Verknüpfungen in Mengen
- Verknüpfungen in der Menge der 2×2 -Matrizen – Untersuchung auf Gruppeneigenschaften
- Zyklische Gruppen
- Endliche kommutative Gruppen – Untersuchung bis zur siebten Ordnung und Aufstellen der Gruppentafeln

- Endliche Gruppen
- Permutationsgruppen und ihre Untergruppen
- Knobelspiele und Geflechte im Lichte der Gruppentheorie
- Algebraische Strukturen: Gruppe, Ring, Körper
- Algebren (Aussagen-, Mengen-, Schaltalgebra, Anwendungsbeispiele)
- Homomorphismus und Isomorphismus
- Stellenwertsysteme
- Systembruchentwicklung reeller Zahlen
- Kettenbrüche
- Diskussion algebraischer Relationen
- Transzendente Gleichungen, die sich auf algebraische Gleichungen zurückführen lassen
- Boolesche Algebra
- Primzahltheorie
- Die Fibonaccizahlen
- Rekursive Zahlenfolgen

Varia

- Lineare Optimierung
- Minimumproblem in der linearen Optimierung
- Lineare Ungleichungen und Linearplanung
- Das Simplexverfahren zur linearen Optimierung mit Anwendung
- Einführung in die ebene Kinematik
- Finanzmathematik
- Die mathematischen Grundlagen der Zinsrechnung und ihre Anwendung
- Rentenrechnung
- Algebraische Kurven
- Die Gammafunktion
- Das Räuber-Beute-System im mathematischen Modell
- Die mathematische Behandlung der gedämpften Schwingungen
- Die Herleitung der Eulerschen Gleichungen und ihre Anwendung in der Physik am Beispiel der gedämpften Schwingung
- Die Anwendung der Exponentialfunktion in der Elektrotechnik
- Die Erzeugung von Näherungsfunktionen nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate und ihre praktische Anwendung in der Physik
- Technische Anwendung Boolescher Funktionen
- Untersuchungen zum optimalen Durchsatz eines Straßentunnels (evtl. mit Computerprogramm)
- Numerische Lösung von Verfolgungsproblemen (mit Computer)
- Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion
- Der Polynomische Lehrsatz und die Polynomkoeffizienten
- Allgemeine Lösung von Gleichungen dritten, vierten und höheren Grades
- Lissajousfiguren
- Regelflächen zweiten Grades mit Bau von Modellen
- Der Goldene Schnitt
- Analyse des Zahlenvorrats eines Taschenrechners
- Fehlerfortpflanzung
- Die mathematische Behandlung der Keplerschen Gesetze
- Der Restklassenkörper modulo 5 – ein Modell der affinen Inzidenzgeometrie
- Das Euler-Sylvester-Jordansche Problem der vertauschten Briefe
- Mittelwerte im Vergleich: Geometrisches, harmonisches, arithmetisches Mittel

- Das Weber-Fechnersche Gesetz als Anwendung des Logarithmus bei Lärmschutzfragen
- Anwendung des Logarithmus im Orgelbau
- Einführung in die Spieltheorie
- Mathematische Aspekte im Werk von M. C. Escher
- Mathematische Analyse ökonomischer Modelle